Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi
Societatea de Ştiinţe Matematice din România — **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**
Filiala Galaţi — **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude”
ediţia a XIV-a
Galaţi, 26 octombrie, 2013

Clasa a X-a

Problema 1.

Se consideră mulţimea $M=\left\{ x\in(0,1)\cup(1,\infty)\mid 7\cdot\ln^3 x-[\ln x]^3-\{\ln x\}^3=\{[\lg x]\}+\left[\left\{e^x\right\}\right] \right\}$.

Să se arate că are loc inegalitatea $\sum_{k=2}^{2013}\log_k x<\dfrac{2012^2}{\ln\dfrac{1}{(2013!)^2}}$, oricare ar fi $x\in M$.

Notaţiile $[\cdot]$ şi $\{\cdot\}$ reprezintă partea întreagă,respectiv partea fracţionară a unui număr real.

Problema 2.

Determinaţi funcţiile $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ care verifică relaţia

$f\left(f\left(n+1\right)+3\right)=n$, $\forall n\in\mathbb{Z}$.

Problema 3.

Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale, pozitive.Arătaţi că mulţimea

$$A=\left\{ n\in\mathbb{N}^* \mid \frac{1+a_n}{a_{n-1}}>\left|\cos a_{n-1}+\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sin a_{n-1}\right| \right\}$$ este infinită.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.
Pentru fiecare subiect se acordă maximum 7 puncte.
Nu se acordă nici un punct din oficiu. Fiecare teză va fi evaluată cu un punctaj de la 0 la 21 puncte.
Timp de lucru : 3 ore